BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2013*

УДК 517.957

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПО ВРЕМЕНИ

Ш.Г.БАГЫРОВ
Бакинский Государственный Университет
sh_bagirov@yahoo.com

Рассматривается полулинейное параболическое уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами по времени во внешности компакта. Изучается вопрос о существовании и несуществовании положительных решений. Найдены точные показатели, при которых положительное решение не существует.

Ключевые слова: полулинейное параболическое уравнение, глобальное решение, периодичность, неравенство Харнака.

Работа посвящена исследованию существования положительного решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+a_0(x,t)\ln^{p-1}(1+|u|)u \tag{1}$$

в цилиндре $Q=(-\infty,+\infty)\times\Omega$, где Ω - внешность компакта в R_x^n, содержащая начало координат, $p>1$, коэффициенты $a_{ij}(x,t),\ a_0(x,t)$ - ограниченные измеримые функции такие, что $a_{ij}(x,t+T)=a_{ij}(x,t),\ \ a_0(x,t+T)=a_0(x,t)$ и

$$\lambda_1|\xi|^2\le\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\le\lambda_2|\xi|^2 \text{ при } (x,t)\in Q,\xi\in R_\xi^4\ \ \lambda_1,\ \lambda_2=const>0. \tag{2}$$

Нелинейным эллиптическим уравнениям типа (1) посвящено большое число работ (см., например, [1,3]). Одним из важнейших вопросов в теории нелинейных уравнений вида (1) является вопрос о существовании положительных решений и их асимптотических свойствах в областях различной структуры. Эти задачи встречаются в римановой геометрии [4].

Обозначим $Q_T^{\rho_1,\rho_2} = (0,T)\times\{x;\ \rho_1 < |x| < \rho_2\}$, $Q_T = (0,T)\times\Omega$, $S_R = \{x; |x| = R\}\times(-\infty,+\infty)$. Под $W_2^{1,1/2}(Q_T)$ будем понимать пространство функций $u(x,t)$ таких, что $u(x,t+T) = u(x,t)$, $u(x,t)\in W_2^{1,0}(Q_T)$ и $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|k|\int\limits_{\Omega}|u_k(x)|^2 dx < \infty$, где

$$u_k(x) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T u(x,t)\exp\left\{-ik\frac{2\pi}{T}t\right\}dt.$$

Норма в этом пространстве определяется равенством

$$\|u\|^2_{W_2^{1,1/2}(Q_T)} = \|u\|^2_{L_2(Q_T)} + \|\nabla u\|^2_{L_2(Q_T)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}|k|\int\limits_{\Omega}|u_k(x)|^2 dx.$$

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1/2}(Q_T)$ пополнение $C^{0,\infty}(Q_T)$ по норме $\|\cdot\|_{W_2^{1,1/2}(Q_T)}$, где $C^{0,\infty}(Q_T)$ - множество бесконечно гладких, T- периодических по t функций, которые в окрестности $\partial\Omega$ равны нулю.

Решением уравнения (1) будем называть функцию $u(x,t)\in W_{2,\mathrm{loc}}^{1,1/2}(Q_T)\cap L_{\infty,\mathrm{loc}}(Q_T)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}(ik)\int\limits_{\Omega}u_k(x)\varphi_{-k}(x)dx + \int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_T}a_0(x,t)\ln^{p-1}(1+|u|)\cdot u\cdot\varphi\, dxdt$$

для любой функции $\varphi(x,t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1/2}(Q_T)$.

Теорема. Пусть $n\ge 3,\ a_0(x,t)\ge c|x|^{\sigma},\ c = const > 0$, и $2+\sigma+(2-n)(p-1)\ge 0$. Тогда уравнение (1) не имеет положительных решений в $Q_T^{R,\infty}$.

Покажем, что эта оценка точная, т.е. в случае $2+\sigma+(2-n)(p-1) < 0$ уравнение (1) может иметь положительные решения.

Для этого рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv -\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + a_0|x|^{\sigma}\ln^{p-1}(1+|u|)u = 0 \qquad (3)$$

в $Q_T^{R,\infty}$, где $a_0 = const > 0,\ p > 1,\ \sigma > -2,\ n\ge 3$. $\mu,\ \varepsilon$ можно подобрать, так чтобы $\overline{u}(x) = \varepsilon r^{\mu},\ r = |x|$ будет верхним решением уравнения (3).

$$L\overline{u} = \varepsilon\cdot\mu(\mu-1)r^{\mu-2} + (n-1)\cdot\mu\cdot r^{\mu-2} + a_0\cdot r^{\sigma}\ln^{p-1}(1+\varepsilon\cdot r^{\mu})\cdot\varepsilon\cdot r^{\mu} =$$

$$= \varepsilon\cdot r^{\mu-2}[\mu(\mu+n-2) + a_0\cdot r^{\sigma+2}\ln^{p-1}(1+\varepsilon\cdot r^{\mu})] =$$

$$= \varepsilon \cdot r^{\mu-2}\left[\mu(\mu+n-2)+a_0\cdot\varepsilon^{p-1}r^{\sigma+2+\mu(p-1)}\ln^{p-1}(1+\varepsilon\cdot r^{\mu})^{\frac{1}{\varepsilon\cdot r^{\mu}}}\right]. \qquad (4)$$

Поскольку

$$2+\sigma+(2-n)(p-1)<0,$$

то

$$-(n-2)<-\frac{\sigma+2}{p-1}.$$

Тогда μ возьмем, так, чтобы

$$-(n-2)<\mu<-\frac{\sigma+2}{p-1}.$$

Из-за того, что

$$a_0\cdot r^{\sigma+2+\mu(p-1)}\ln^{p-1}(1+\varepsilon\cdot r^{\mu})^{\frac{1}{\varepsilon\cdot r^{\mu}}}$$

будет ограниченным, ε возьмем настолько маленьким, что выражение в скобке (4) было меньше нуля.

Тогда при выбранной ε, μ

$$\bar{u}=\varepsilon\cdot|x|^{\mu}$$

верхнее решение уравнения (3). Очевидно, что $\underline{u}(x)=c|x|^{2-n}$ нижнее решение уравнения (3).

Действительно:

$$L\underline{u}=c(2-n)(1-n)|x|^{-n}+c(n-1)(2-n)x^{-n}+$$

$$+a_0|x|^{\sigma}\cdot c\cdot\ln^{p-1}(1+c|x|^{2-n})|x|^{2-n}=$$

$$=a_0|x|^{\sigma}\cdot c\cdot\ln^{p-1}(1+c|x|^{2-n})|x|^{2-n}\geq 0.$$

Поскольку $2-n<\mu$, то c можно подобрать так, чтобы при больших R

$$\underline{u}(x)\leq\bar{u}(x) \text{ в } Q_T^{R_0,R}.$$

Тогда известно, что уравнение (3) имеет решение $u(x)$ и

$$0<\underline{u}(x)\leq u(x)\leq\bar{u}(x).$$

Доказательство теоремы. 1) Пусть сначала $2+\sigma+(2-n)\times\times(p-1)>0$. Обозначим $H(x,t)=a_0(x,t)\cdot\ln^{p-1}(1+|u|)$. Если $u(x,t)$ положительное решение уравнения (1), то оно удовлетворяет условию леммы 1 из [2]. Тогда

$$|x|^2H(x,t)\geq c|x|^2\cdot|x|^{\sigma}\cdot\ln^{p-1}(1+|u|)\geq$$

$$\geq c|x|^2\cdot|x|^{\sigma}\cdot\ln^{p-1}(1+\alpha_0|x|^{2-n})=$$

$$= c_1|x|^{2+\sigma+(2-n)(p-1)}\left(\frac{1}{\alpha_0|x|^{2-n}}\right)^{p-1}\ln^{p-1}(1+\alpha_0|x|^{2-n}) =$$

$$= c_1|x|^{2+\sigma+(2-n)(p-1)}\ln^{p-1}(1+\alpha_0|x|^{2-n})^{\frac{1}{\alpha_0|x|^{2-n}}} \geq$$

$$\geq c_2|x|^{2+\sigma+(2-n)(p-1)}.$$

Рассмотрим линейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + H(x,t)u \tag{5}$$

в $Q_T^{R,\infty}$, где коэффициенты $a_{ij}(x,t)$ удовлетворяют условиям (2) и $H(x,t+T) = H(x,t)$, $H(x,t) \in L_{\infty,\text{loc}}(Q_T^{R,\infty})$. По лемме 2 из [2] следует, что существует c, зависящая от n, λ_1, λ_2, такая, что если $H(x,t) \geq c\|x\|^2$, то уравнение (4) не имеет положительных решений в $Q_T^{R,\infty}$.

Если $2+\sigma+(2-n)(p-1) > 0$, то

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^2 H(x,t) = \infty. \tag{6}$$

Согласно (6) и лемме 2 из [2] уравнение (5) не имеет положительных решений в $Q_T^{R,\infty}$ при условии $2+\sigma+(2-n)(p-1) > 0$. Значит, и уравнение (1) не имеет положительных решений в $Q_T^{R,\infty}$ при этом условии.

2) Пусть теперь $2+\sigma+(2-n)(p-1) = 0$ и уравнение (1) имеет положительное решение $u(x,t)$. По лемме 1 из [2]

$$a_0(x,t)\cdot\ln^{p-1}(1+|u|) \geq c|x|^{\sigma}\cdot\ln^{p-1}(1+\alpha_0|x|^{2-n})$$

$$\geq \alpha\cdot|x|^{-2}|x|^{2+\sigma+(2-n)(p-1)} = \alpha\cdot|x|^{-2}.$$

Тогда

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \alpha^2\cdot|x|^{-2}u \leq 0$$

в $Q_T^{R,\infty}$.

Рассмотрим уравнение

$$-\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + \alpha^2\cdot|x|^{-2}v = 0 \tag{7}$$

в $Q_T^{R,\infty}$ и пусть уравнение (7) имеет неотрицательное решение $v(x,t)$, т.е.

$$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(ik)\int_{\Omega}V_k(x)\varphi_{-k}(x)dx+\int_{Q_T^{R,\infty}}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dxdt=\alpha^2\int_{Q_T^{R,\infty}}|x|^{-2}V\varphi dxdt \quad (8)$$

для любой функции $\varphi(x,t)\in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1/2}(Q_T^{R,\infty})$. Не нарушая общности, в процессе доказательства всюду будем считать $R=1$.

Возьмем пробную функцию $\varphi(x,t)$ такую, что $0\le\varphi(x,t)=\varphi(x)\in C^\infty$, $|\nabla\varphi|^2\le c_2/|x|^2$ и $\varphi(x)=0$ при $|x|\le 1,\ |x|\ge 2\rho$ и $\varphi(x)=1$ при $2\le|x|\le\rho$. Тогда из (8) вытекает равенство

$$\alpha^2\int_{Q_T^{1,2\rho}}|x|^{-2}V\varphi dxdt=\int_{Q_T^{1,2\rho}}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dxdt\,. \quad (9)$$

Оценим левую часть (9) снизу и правую часть сверху

$$\alpha^2\int_{Q_T^{1,2\rho}}|x|^{-2}V\varphi dxdt\ge\alpha^2\int_{Q_T^{2\rho}}|x|^{-2}Vdxdt\ge\alpha_1^2\int_{Q_T^{2\rho}}|x|^{-2}|x|^{2-n}dxdt=\alpha_2^2\ln\frac{\rho}{2} \quad (10)$$

$$\int_{Q_T^{1,2\rho}}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dxdt=\int_{Q_T^{1,2}}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dxdt+$$

$$+\int_{Q_T^{\rho,2\rho}}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dxdt\le c_3+c_4\left(\int_{Q_T^{\rho,2\rho}}|\nabla V|^2dxdt\right)^{1/2}\left(\int_{\rho<|x|<2\rho}|\nabla\varphi|^2dx\right)^{1/2}\le$$

$$\le c_3+c_5\left(\int_{Q_T^{\rho,2\rho}}|\nabla V|^2dxdt\right)^{1/2}\left(\int_{\rho<|x|<2\rho}\frac{1}{|x|^2}dx\right)^{1/2}=$$

$$=c_3+c_6\rho^{(n-2)/2}\left(\int_{Q_T^{\rho,2\rho}}|\nabla V|^2dxdt\right)^{1/2}. \quad (11)$$

Последний интеграл оценим с помощью неравенства Харнака:

$$\left(\int_{Q_T^{\rho,2\rho}}|\nabla V|^2dxdt\right)^{1/2}\le c_7\left(\int_{Q_T^{\rho/2,3\rho}}\frac{V^2}{\rho^2}dxdt\right)^{1/2}\le c_8\left(\int_{Q_T^{\rho/2,3\rho}}\frac{(\min V)^2}{\rho^2}dxdt\right)^{1/2}=$$

$$=c_9\rho^{(n-2)/2}\min_{Q_T^{\rho/2,3\rho}}V. \quad (12)$$

В итоге, учитывая неравенства (10), (11) и (12), придем к неравенству $\alpha_2^2\ln(\rho/2)\le c_3+c_{10}\rho^{n-2}\min\limits_{Q_T^{\rho/2,3\rho}}V$, из которого находим

$$\min_{Q_T^{\rho/2,3\rho}}V\ge\frac{1}{c_{10}}\rho^{2-n}\left(\alpha^2\ln\frac{\rho}{2}-c_3\right).$$

Отсюда следует неравенство

$$V(x,t) \geq c_{11}|x|^{2-n} \ln(|x|/c_{12}). \tag{13}$$

Теперь докажем, что в действительности существует положительная функция $V(x,t)$, удовлетворяющая уравнению (7). Для этого рассмотрим задачу

$$-\frac{\partial V_R}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial V_R}{\partial x_j}\right) + \alpha^2 |x|^{-2} V_R = 0, \tag{14}$$

$$V_R = 1 \text{ при } |x| = 1 \text{ и } V_R = 0 \text{ при } |x| = R. \tag{15}$$

Очевидно, что задача (14), (15) имеет решение. Докажем, что $V_R \geq 0$ и $V_R \leq 1$. Поскольку неравенство $V_R \geq 0$ очевидно, то остановимся на доказательстве неравенства $V_R \leq 1$. Предположим, что существует область $Q' \in Q_T^{1,R}$, в которой $V_R > 1$. Пусть $\psi(x,t) = V_R - 1$ при $(x,t) \in Q'$ и $\psi(x,t) = 0$ при $(x,t) \notin Q'$.

Если в качестве пробной функции взять $\psi(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1/2}(Q_T^{1,R})$, то из определения решения получим равенство

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik) \int_{1<|x|<R} V_{Rk}(x)\psi_{-k}(x)dx - \int_{Q'} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial V_R}{\partial x_j}\frac{\partial (V_R - 1)}{\partial x_i} dxdt +$$

$$+ \alpha \int_{Q'} |x|^{-2} V_R (V_R - 1) dxdt = 0.$$

Используя усреднение $\psi_h(x,t) = h^{-1}\int_t^{t+h} \psi(x,\tau)d\tau$, легко показать, что первое слагаемое равно нулю. Тогда, учитывая условии (2), получаем соотношения

$$\lambda_1 \int_{Q'} |\nabla V_R|^{-2} dxdt + \alpha^2 \int_{Q'} |x|^{-2} V_R dxdt = \alpha^2 \int_{Q'} |x|^{-2} V_R^2 dxdt \leq \alpha^2 c_{13} \int_{Q'} |\nabla V_R|^2 dxdt,$$

при этом последнее следует из неравенства Харди. Если взять α таким, что $\lambda_1 - \alpha^2 c_{13} > 0$, то получим неравенство

$$(\lambda_1 - \alpha^2 c_{13}) \int_{Q'} |\nabla V_R|^2 dxdt + \alpha^2 \int_{Q'} |x|^2 V_R dxdt \leq 0.$$

Поскольку все интегралы в этом неравенстве положительные, то мы пришли к противоречию. Значит, $V_R \leq 1$.

Из того, что $V_R \geq 0$, $V_R \leq 1$ для любого R и V_R - решение задачи (14), (15), вытекает, что в каждом компакте $V_R(x,t)$ равномерно сходится к некоторой функции $V(x,t)$, которая будет неотрицательным решением уравнении (7) и, значит, выполняется неравенство (13).

Обозначим $W_R(x,t) = u(x,t) - c_{14}V_R(x,t)$, где $c_{14} = (1/2)\min\limits_{|x|=1} u(x,t)$. Для $W_R(x,t)$ выполняется неравенство

$$-\frac{\partial W_R}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial W_R}{\partial x_j} \right) + \alpha^2 |x|^{-2} W_R \le 0,$$

$W_R > 0$ при $|x| = 1$ и $W_R \ge 0$ при $|x| = R$. Отсюда можно утверждать, что $W_R(x,t) \ge 0$ в $Q_T^{1,R}$. Действительно, если предположить существование области, в которой $W_R(x,t) < 0$, то, как и выше при доказательстве неравенства $V_R \le 1$ применяя неравенство Харди, приходим к противоречию, если взять α^2 достаточно малым.

В итоге получаем, что $u(x,t) \ge c_{14}V_R(x,t)$ при любом R. Переходя к пределу при $R \to \infty$, будем иметь неравенства

$$u(x,t) \ge c_{14}V(x,t) \ge c_{15}|x|^{2-n} \ln\frac{|x|}{c_{12}}.$$

Далее, как и в случае 1), используя лемму 2, из [2] завершаем доказательство теоремы

Теорема 2. Пусть $n = 1$ или $n = 2$, $a_0(x,t) \ge c|x|^{\sigma}$, $\sigma > -2$, $c = const > 0$. Тогда при любой $p > 1$ уравнение (1) не имеет положительных решений в $Q_T^{R,\infty}$.

Доказательство. Пусть это не так, т.е. уравнение (1) имеет положительное решение в $Q_T^{R,\infty}$. В определение решения в качестве пробной функции возьмем

$$\psi(x,t) = \varphi^2(x)u^{-1}(x,t),$$

где $\varphi(x) = \varphi(|x|)$ бесконечно гладкая, финитная функция.

Тогда получим:

$$\int\limits_{Q_T^{R,\infty}} a_0(x,t)\ln^{p-1}(1+|u|)\varphi^2(x)dxdt = \sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{Q_T^{R,\infty}} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{2\varphi}{u}dxdt -$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{Q_T^{R,\infty}} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\varphi^2}{u^2}dxdt \le$$

$$\le -\lambda_1 \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{Q_T^{R,\infty}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 \frac{\varphi^2}{u^2}dxdt + \sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{Q_T^{R,\infty}} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{2\varphi}{u}dxdt \le$$

$$\leq -\int\limits_{Q_T^{R,\infty}} \sum_{i,j=1}^{2}\left(\sqrt{\lambda_1}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\varphi}{u} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x,t)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)^2 dxdt +$$

$$+\frac{1}{\lambda_1}\int\limits_{Q_T^{R,\infty}} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^2(x,t)\sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)^2 dxdt \leq c\cdot \int\limits_{Q_T^{R,\infty}} |\nabla\varphi|^2 . \tag{16}$$

Пусть $\varphi(x)=\varphi(|x|)$ такая, что $\varphi(x)=0$ при $|x|<R+e^{-2L}$, $|x|>R+e^{2L}$ и $\varphi(x)=1$ при $R+\bar{e}^{L}\leq |x| \leq R+e^{L}$.

Тогда из (16) получим:

$$\int\limits_{Q_T^{R+e^{-L},R+e^{L}}} |x|^{\sigma}\ln^{p-1}(1+|u|)dxdt \leq c_1\cdot \int\limits_{Q_T^{R,\infty}} |\nabla\varphi|^2 dxdt \leq c_2\cdot \int\limits_{R}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 rdr, \tag{17}$$

где $r=|x|$.

Сделаем замену $\tau=\ln(r-R),\ w(\tau)=\varphi(R+e^{t})$. Тогда

$$\int\limits_{R}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 rdr = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial w}{\partial\tau}\right)^2 (1+Re^{-\tau})d\tau. \tag{18}$$

Пусть $\varphi_0(s)$ бесконечно гладкая функция такая, что $\varphi_0(s)=1$ при $|s|\leq 1,\ \varphi_0(s)=0$ при $|s|\geq 2$ и $\int\limits_{1\leq|s|\leq 2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial s}\right)^2 ds<\infty$.

Возьмем $w(\tau)=\varphi_0\left(\frac{\tau}{L}\right)=\varphi_0(s),\ s=\frac{\tau}{L}$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial w}{\partial\tau}\right)^2 (1+Re^{-\tau})d\tau = \int\limits_{1\leq|s|\leq 2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial s}\right)^2 \frac{1}{L^2}(1+Re^{-sL})Lds \leq$$

$$\leq \frac{1+Re^{-L}}{L}\int\limits_{1\leq|s|\leq 2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial s}\right)^2 ds. \tag{19}$$

Из (17), (18) и (19) получим:

$$\int\limits_{Q_T^{R+e^{-L},R+e^{L}}} |x|^{\sigma}\ln^{p-1}(1+|u|)dxdt \leq c_2\cdot\frac{1+Re^{-L}}{L}\int\limits_{1\leq|s|\leq 2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial s}\right)^2 ds. \tag{20}$$

Переходя к пределу при $L\to+\infty$ из (20) получим, что

$$\int\limits_{Q_T^{R,\infty}} |x|^{\sigma}\ln^{p-1}(1+|u|)\varphi^2(x)dxdt \leq 0 .$$

Значит $u\equiv 0$ и этим теорема 2 доказывается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Митидиеры Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. мат. ин-та. им. Стеклова РАН, 2001, т.234, с.9-234.
2. Багыров Ш.Г. О существовании положительного решения нелинейного параболического уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами по времени // Дифференциальные уравнения, 2007, т.43, №4, с. 562-565.
3. Gidas B., Spruck J. Global and local behavior of positive solutions of linear elliptic equations // Comm. Pare. Appl. Math. 1981, v.34, №4, p. 525-598.
4. Ni-W.-M. // Indiana Univ. Math. J. 1982, v.31, №4, p. 493-529.

ZAMANA GÖRƏ PERİODİK ƏMSALLI QEYRİ-XƏTTİ PARABOLİK TƏNLİYİN MÜSBƏT HƏLLİNİN VARLIĞI

Ş.H.BAĞIROV

XÜLASƏ

Kompaktın xarici olan oblastda zaman arqumentinə nəzərən periodik əmsallı yarımxətti parabolik tənliyə baxılır. Bu tənliyin müsbət həllinin varlığı və yoxluğu öyrənilir. Müsbət həllin yoxluğu üçün qeyri-xəttiliyin qüvvətinin dəqiq qiymətləndirilməsi tapılır.

Açar sözlər: yarımxətti parabolik tənlik, qlobal həll, periodiklik, Harnak bərabərsizliyi.

ON EXISTENCE OF SOLUTION OF NONLINEAR PARABOLIC EQUATION WITH THE TIME-PERIODIC COEFFICIENTS

Sh.H.BAGIROV

SUMMARY

There was studied a semilinear parabolic equation with the time-periodic coefficients in the exterior of a compact. We investigate the existence of positive solutions and find the exact indicators of nonlinearity for which the positive solution does not exist.

Key words: semilinear parabolic equation, global solution, periodicity, Harnak inequality.

Поступило в редакцию: 14.06.2013 г.
Подписано к печати: 17.10.2013 г.